Partiel L3 – Algorithmique

Yves Robert

18 Mars 2020, 13h30-15h30

Tous les exercices sont indépendants. That said, enjoy and good luck !

1 Amusettes

1.1 Bob perd sa valise

Bob voyage par avion de Denver à Lyon avec deux escales, la première à Minneapolis, la seconde à Paris. La probabilité p de perdre un bagage est la même à Denver, à Minneapolis, et Paris. Arrivé à Lyon, Bob constate l'absence de sa valise. Avec quelle probabilité celle-ci est-elle restée à Denver ? à Minneapolis ? à Paris ?

1.2 Tirage avec ou sans remise

Une personne souhaitant rentrer chez elle a un trousseau de n clefs. Déterminer le nombre moyen d'essais nécessaires dans chacun des deux cas suivants :

1. La personne élimine après chaque essai la clef qui n'a pas convenu
2. La personne remet dans le trousseau après chaque essai la clef qui n'a pas convenu

1.3 Valeur maximale d'une boule

k urnes contiennent chacune n boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à n. On prélève une boule dans chaque urne, et on appelle X_n la variable aléatoire égale au plus grand des numéros obtenus.

1. Calculer $\mathbb{P}(X_n = 1)$
2. Calculer $\mathbb{P}(X_n \leq h)$ pour $2 \leq h \leq n$
3. Donner une formule pour $\mathbb{E}(X_n)$ (ne pas chercher un calcul explicite)
4. (difficile ?) Donner un équivalent de $\mathbb{E}(X_n)$ lorsque n tend vers l'infini (avec k fixé)

1.4 Maximum d'un tableau

On considère un tableau A de n entiers tous distincts dont on cherche le maximum avec l'algorithme suivant :

FAIRE UNE PERMUTATION ALÉATOIRE DES ÉLÉMENTS DE A
$m \leftarrow -\infty$
POUR $i = 1$ À n FAIRE
    SI $A[i] > m$ ALORS
(*) $m \leftarrow A[i]$
RENVOYER m

Quelle est l'espérance du nombre du fois où la ligne (*) sera exécutée, en supposant toutes les permutations équiprobables ?

2 Qui a pris mon siège ?

Les n passagers d'un avion à n sièges ont tous reçu leur numéro de siège. On numérote passagers et sièges de 1 à n, et le passager i a le siège i. Les passagers rentrent dans l'avion un par un. Hélas, le premier passager s'installe dans un siège qui n'est pas le sien. Chaque passager suivant s'installe dans son siège s'il est libre, et sinon dans un siège actuellement vide choisi au hasard. On veut calculer la probabilité de l'évènement F : le dernier passager se retrouve assis à son siège.

1. soit $K \geq 2$ le siège choisi par le passager 1, et $\alpha_k = \mathbb{P}(F \mid K = k)$.
   Montrer que $\mathbb{P}(F) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^{n} \alpha_k$
2. Trouver une relation de récurrence entre α_k et les α_i où $i \geq k$
3. Calculer les α_k puis $\mathbb{P}(F)$

3 Distance et couplage *(difficile)*

Soit Ω un ensemble fini. On considère deux distributions de probabilité μ et ν sur Ω dont les évènements sont toutes les parties de Ω. On définit leur distance de variation totale $d_{VT}(\mu, \nu)$ comme la différence maximale entre les probabilités assignées à un évènement par les deux distributions ; formellement, $d_{VT}(\mu, \nu) = \max_{A \subset \Omega} |\mu(A) - \nu(A)|$.

1. Montrer que $d_{VT}(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \sum_{x \in \Omega} |\mu(x) - \nu(x)|$.
   Indication : introduire l'évènement $B = \{x \in \Omega, \mu(x) \geq \nu(x)\}$ et son complémentaire $\bar{B}$, et montrer que $\mu(A) - \nu(A) \leq \mu(B) - \nu(B)$ et $\nu(A) - \mu(A) \leq \nu(\bar{B}) - \mu(\bar{B})$ pour tout $A \subset \Omega$
2. Montrer que d_{VT} est bien une distance (i.e., vérifie l'inégalité triangulaire).
3. Montrer que

$$d_{VT}(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \sup_{f:\Omega \to \mathbb{R}, \max_{x \in \Omega} |f(x)| \leq 1} \left(\sum_{x \in \Omega} f(x)\mu(x) - \sum_{x \in \Omega} f(x)\nu(x) \right)$$

4. *(très difficile)*
   Un couplage des distributions μ et ν est une paire (X, Y) de variables aléatoires "réalisant" ces distributions : $\forall x \in \Omega, \mathbb{P}(X = x) = \mu(x)$ et $\forall y \in \Omega, \mathbb{P}(Y = y) = \nu(y)$. Montrer que

$$d_{VT}(\mu, \nu) = \inf_{(X,Y) \text{ couplage de } \mu \text{ et } \nu} \mathbb{P}(X \neq Y)$$